

# 고3 2024년 6월 모의평가

2024학년도 6월 모의평가 수학영역 (공통+기하)

30 Questions | 100 min

1.  $\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B)  $\frac{3}{4}$
- (C) 1
- (D)  $\frac{5}{4}$
- (E)  $\frac{3}{2}$

2. 함수  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5

3. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 60$ 일 때,  $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

- (A) 10    (B) 15    (C) 20    (D) 25    (E) 30

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 - f(1)$  을 만족시킬 때,  $f(1)$ 의 값은? [3점]

- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5

5. 다항함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를  $g(x) = (x^3 + 1)f(x)$  라 하자.  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 3$ 일 때,  $g'(1)$ 의 값은?  
[3점]

- (A) 12    (B) 14    (C) 16    (D) 18    (E) 20

6.  $\cos \theta < 0$ 이고  $\sin(-\theta) = \frac{1}{7} \cos \theta$ 일 때,  $\sin \theta$ 의 값은? [3점]

- (A)  $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$   
 (B)  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$   
 (C) 0  
 (D)  $\frac{\sqrt{2}}{10}$   
 (E)  $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

7. 상수  $a$  ( $a > 2$ )에 대하여 함수  $y = \log_2(x - a)$ 의 그래프의 점근선이 두 곡선  $y = \log_2 \frac{x}{4}$ ,  $y = \log_1 \frac{x}{2}$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.  $\overline{AB} = 4$ 일 때,  $a$ 의 값은? [3점]

- (A) 4    (B) 6    (C) 8    (D) 10    (E) 12

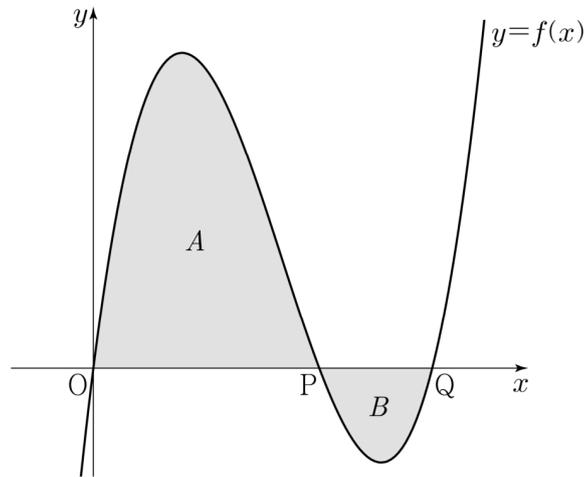
8. 두 곡선  $y = 2x^2 - 1$ ,  $y = x^3 - x^2 + k$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수  $k$ 의 값은? [3점]

- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5

9. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$  을 만족시킬 때,  $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

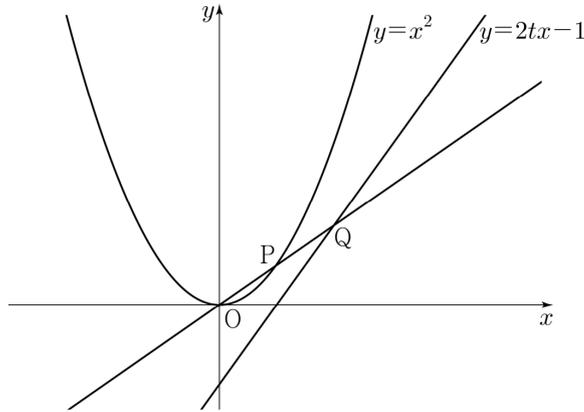
- (A)  $\frac{10}{21}$   
(B)  $\frac{4}{7}$   
(C)  $\frac{2}{3}$   
(D)  $\frac{16}{21}$   
(E)  $\frac{6}{7}$

10. 양수  $k$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는  $f(x) = kx(x - 2)(x - 3)$  이다. 곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축이 원점  $O$ 와 두 점  $P, Q$  ( $\overline{OP} < \overline{OQ}$ )에서 만난다. 곡선  $y = f(x)$ 와 선분  $OP$ 로 둘러싸인 영역을  $A$ , 곡선  $y = f(x)$ 와 선분  $PQ$ 로 둘러싸인 영역을  $B$ 라 하자. ( $A$ 의 넓이) - ( $B$ 의 넓이) = 3 일 때,  $k$ 의 값은? [4점]



- (A)  $\frac{7}{6}$
- (B)  $\frac{4}{3}$
- (C)  $\frac{3}{2}$
- (D)  $\frac{5}{3}$
- (E)  $\frac{11}{6}$

11. 그림과 같이 실수  $t$  ( $0 < t < 1$ )에 대하여 곡선  $y = x^2$  위의 점 중에서 직선  $y = 2tx - 1$ 과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선  $y = 2tx - 1$ 과 만나는 점을 Q라 할 때,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{PQ}{1-t}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)  
 [4점]

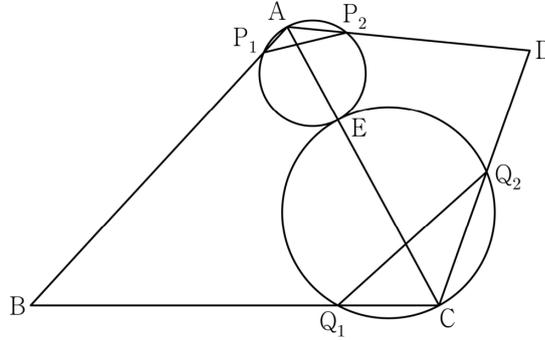


- (A)  $\sqrt{6}$
- (B)  $\sqrt{7}$
- (C)  $2\sqrt{2}$
- (D) 3
- (E)  $\sqrt{10}$

12.  $a_2 = -4$ 이고 공차가 0이 아닌 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{b_n\}$ 을  $b_n = a_n + a_{n+1}$  ( $n \geq 1$ )이라 하고, 두 집합  $A, B$ 를  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ 라 하자.  $n(A \cap B) = 3$ 이 되도록 하는 모든 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_{20}$ 의 값의 합은? [4점]

- (A) 30    (B) 34    (C) 38    (D) 42    (E) 46

13. 그림과 같이  $\overline{BC} = 3$ ,  $\overline{CD} = 2$ ,  $\cos(\angle BCD) = -\frac{1}{3}$ ,  $\angle DAB > \frac{\pi}{2}$  인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각  $P_1, P_2$ 라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각  $Q_1, Q_2$ 라 하자.  $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$ 이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때,  $\overline{AB} + \overline{AD}$ 의 값은? (단,  $\overline{AB} > \overline{AD}$ ) [4점]



- (A)  $\sqrt{21}$
- (B)  $\sqrt{22}$
- (C)  $\sqrt{23}$
- (D)  $2\sqrt{6}$
- (E) 5

14. 실수  $a$  ( $a \geq 0$ )에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도  $v(t)$ 를  $v(t) = -t(t - 1)(t - a)(t - 2a)$  라 하자. 점 P가 시각  $t = 0$ 일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는  $a$ 에 대하여, 시각  $t = 0$ 에서  $t = 2$ 까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

- (A)  $\frac{1}{5}$
- (B)  $\frac{7}{30}$
- (C)  $\frac{4}{15}$
- (D)  $\frac{3}{10}$
- (E)  $\frac{1}{3}$

15. 자연수  $k$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열  $\{a_n\}$ 이 있다.  $a_1 = k$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \leq 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$  이다.  $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이 되도록 하는 모든  $k$ 의 값의 합은? [4점]

- (A) 10    (B) 14    (C) 18    (D) 22    (E) 26

16. 부등식  $2^{x-6} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^x$  을 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 값의 합을 구하시오. [3점]

17. 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = 8x^3 - 1$ 이고  $f(0) = 3$ 일 때,  $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 상수  $a, b$ 에 대하여 삼차함수  $f(x) = ax^3 + bx + a$ 는  $x = 1$ 에서 극소이다. 함수  $f(x)$ 의 극솟값이  $-2$ 일 때, 함수  $f(x)$ 의 극댓값을 구하시오. [3점]

19. 두 자연수  $a, b$ 에 대하여 함수  $f(x) = a \sin bx + 8 - a$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $a + b$ 의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 이다.

(나)  $0 \leq x < 2\pi$ 일 때,  $x$ 에 대한 방정식  $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(9)$ 의 값을 구하시오. [4점]  $x \geq 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x) \geq g(4)$ 이고  $|g(x)| \geq |g(3)|$ 이다.

21. 실수  $t$ 에 대하여 두 곡선  $y = t - \log_2 x$ 와  $y = 2^{x-t}$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표를  $f(t)$ 라 하자. 의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라  $A, B, C$ 의 값을 정할 때,  $A + B + C$ 의 값을 구하시오. (단,  $A + B + C \neq 0$ ) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면  $A = 100$ , 거짓이면  $A = 0$ 이다.
- 명제 ㄴ이 참이면  $B = 10$ , 거짓이면  $B = 0$ 이다.
- 명제 ㄷ이 참이면  $C = 1$ , 거짓이면  $C = 0$ 이다.

- ㄱ.  $f(1) = 1$ 이고  $f(2) = 2$ 이다.
- ㄴ. 실수  $t$ 의 값이 증가하면  $f(t)$ 의 값도 증가한다.
- ㄷ. 모든 양의 실수  $t$ 에 대하여  $f(t) \geq t$ 이다.

22. 정수  $a$  ( $a \neq 0$ )에 대하여 함수  $f(x)$ 를  $f(x) = x^3 - 2ax^2$  이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수  $k$ 의 값의 곱이  $-12$ 가 되도록 하는  $a$ 에 대하여  $f'(10)$ 의 값을 구하시오. [4점] 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \times \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} < 0$  을 만족시키는 세 실수  $x_1, x_2, x_3$ 이 열린구간  $\left(k, k + \frac{3}{2}\right)$ 에 존재한다.

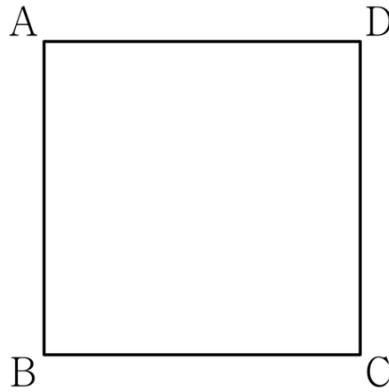
23. 포물선  $y^2 = -12(x - 1)$ 의 준선을  $x = k$ 라 할 때, 상수  $k$ 의 값은? [2점]

- (A) 4    (B) 7    (C) 10    (D) 13    (E) 16

24. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여  $2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} = q\overrightarrow{CA}$  일 때,  $p - q$ 의 값은? (단,  $p$ 와  $q$ 는 실수이다.) [3점]

- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5

25. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서  $(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD}) = 0$  일 때, 실수  $k$ 의 값은? [3점]



- (A) 1
- (B)  $\frac{1}{2}$
- (C)  $\frac{1}{3}$
- (D)  $\frac{1}{4}$
- (E)  $\frac{1}{5}$

26. 두 초점이  $F(12, 0), F'(-4, 0)$ 이고, 장축의 길이가 24인 타원  $C$ 가 있다.  $\overrightarrow{F'F} = \overrightarrow{F'P}$ 인 타원  $C$  위의 점  $P$ 에 대하여 선분  $F'P$ 의 중점을  $Q$ 라 하자. 한 초점이  $F'$ 인 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  이 점  $Q$ 를 지날 때,  $\overrightarrow{PF} + a^2 + b^2$ 의 값은? (단,  $a$ 와  $b$ 는 양수이다.) [3점]

- (A) 46    (B) 52    (C) 58    (D) 64    (E) 70

27. 포물선  $(y - 2)^2 = 8(x + 2)$  위의 점 P와 점 A(0, 2)에 대하여  $\overline{OP} + \overline{PA}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를  $P_0$ 이라 하자.  $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0A}$ 를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의  $y$ 좌표의 최댓값과 최솟값을 각각  $M, m$ 이라 할 때,  $M^2 + m^2$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

- (A) 8    (B) 9    (C) 10    (D) 11    (E) 12

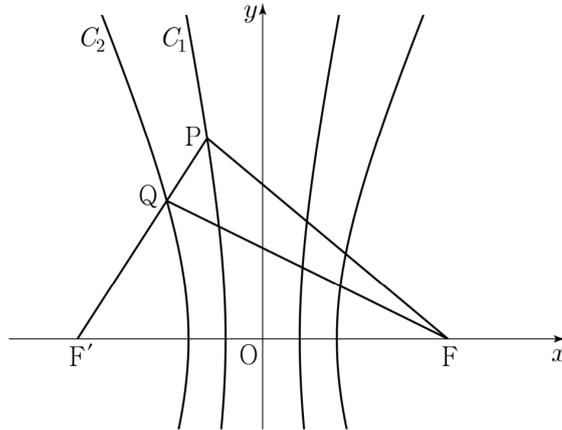
28. 좌표평면의 네 점 A(2, 6), B(6, 2), C(4, 4), D(8, 6)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

(가)  $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OC} \times \{|\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC}| - 3\} = 0$   
 (나) 두 벡터  $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$ 와  $\overrightarrow{OC}$ 가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서  $y$ 좌표가 최대인 점을 Q,  $y$ 좌표가 최소인 점을 R이라 할 때,  $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- (A) 25    (B) 26    (C) 27    (D) 28    (E) 29

29. 두 점  $F(c, 0), F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )을 초점으로 하는 두 쌍곡선  $C_1 : x^2 - \frac{y^2}{24} = 1, C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$  이 있다. 쌍곡선  $C_1$  위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분  $PF'$ 이 쌍곡선  $C_2$ 와 만나는 점을 Q라 하자.  $\overline{PQ} + \overline{QF}, 2\overline{PF'}, \overline{PF} + \overline{PF'}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는  $m$ 이다.  $60m$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 직선  $2x + y = 0$  위를 움직이는 점 P와 타원  $2x^2 + y^2 = 3$  위를 움직이는 점 Q에 대하여  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키고,  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

